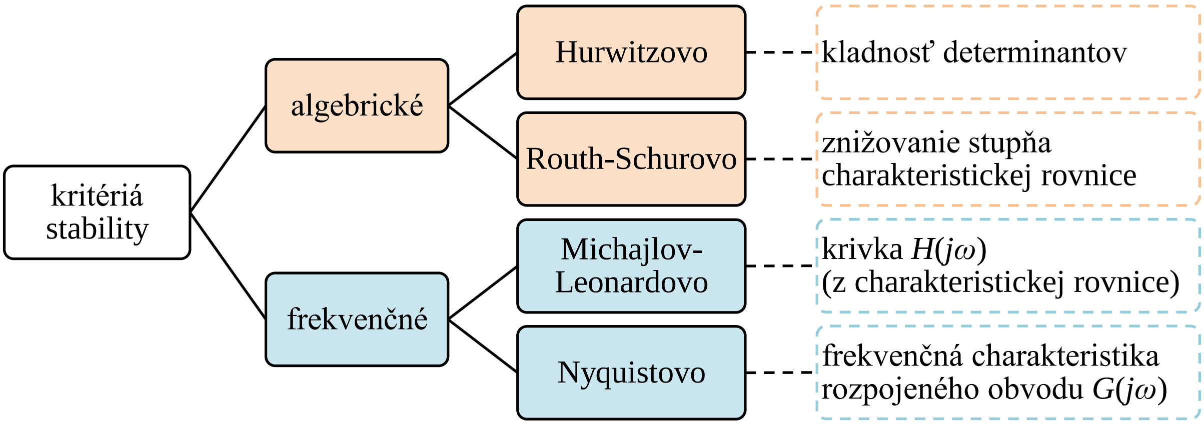
4.3. Kritériá stability

Vyčíslenie koreňov charakteristickej rovnice vyššieho než druhého stupňa je prácna činnosť aj s použitím výpočtovej techniky. Preto boli zostavené matematické kritéria, ktoré umožňujú z charakteristickej rovnice určiť, či sú jej korene so zápornou reálnou časťou alebo nie, a tým určiť stabilitu obvodu, bez toho, aby sme museli danú rovnicu riešiť.



Uvedieme si dve algebrické kritériá (algebrickými úpravami koeficientov charakteristickej rovnice určíme, či sú jej všetky korene so zápornou reálnou časťou alebo nie, a tým stabilitu) a dve frekvenčné kritériá (zostrojíme frekvenčnú charakteristiku a z jej tvaru posúdime stabilitu). Kritérií stability je viac, ale tu uvedené patria medzi najpoužívanejšie.

Ďalej budú tieto kritériá uvedené bez dôkazov s dôrazom na ich praktické použitie.

4.3.1. Hurwitzovo kritérium

Majme danú charakteristickú rovnicu (52)

$$a_n s^n + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

v ktorej je splnená nutná ale nepostačujúca podmienka stability, teda existencia a kladnosť všetkých koeficientov. Utvorme z týchto koeficientov determinant n-tého stupňa podľa nasledujúcej schémy (tzv. Hurwitzov determinant)

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_5 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_6 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Z tohto determinantu H_n, ktorý je n-tého stupňa (n riadkov, n stĺpcov) utvoríme subdeterminanty H_{n-1} až H_1 tak, že vždy vynecháme posledný riadok a posledný stĺpec.

Hurwitzovo kritérium: Obvod je stabilný (korene charakteristickej rovnice sú záporné alebo majú zápornú reálnu časť), keď determinant H_n a všetky subdeterminanty H_{n-1} až H_1 sú kladné (n je stupeň charakteristickej rovnice). Ak je niektorý z determinantov nulový, je obvod na hranici stability.

Toto je potrebné spresniť. Táto úplne všeobecná podmienka sa dá spresniť pre jednotlivé stupne obvodov. Začneme obvodom, ktorého charakteristická rovnica je **2. stupňa**

$$a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

Ak sú všetky koeficienty a_0, a_1, a_2 kladné, je splnená, v tomto prípade nutná a postačujúca, podmienka stability a nie je potrebné ďalšie vyšetrovanie.

Pri obvodoch, ktorých charakteristická rovnica je **3. stupňa**

$$a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

potom pri kladnosti koeficientov stačí, aby bol $\boldsymbol{H_2 > 0}$

Pri obvodoch, ktorých charakteristická rovnica je **4. stupňa**

$$a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

je postačujúcou podmienkou stability: $\boldsymbol{H_3 > 0}$

Pre obvody s charakteristickou rovnicou **5. stupňa**

$$a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = 0$$

musí pre splnenie podmienok stability platiť, že $\boldsymbol{H_2 > 0}$ a $\boldsymbol{H_4 > 0}$. Zhrnutie je v tab. 6.

Stupeň	*Nutná podmienka*	*Ďalšia nutná podmienka*
2.	kladnosť koeficientov	-
3.		$H_2 > 0$
4.		$H_3 > 0$
5.		$H_2 > 0$; $H_4 > 0$

Tab. 6 Hurwitzovo kritérium

Príklad 31:

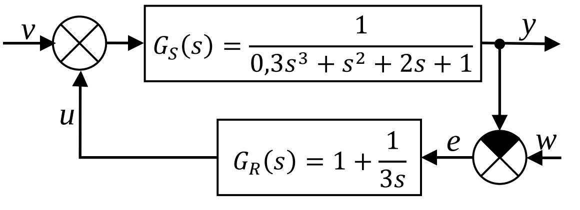
Určte stabilitu regulačného obvodu podľa Obr. 58.

Riešenie: Prenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = \left(1 + \frac{1}{3s}\right)\frac{1}{0{,}3s^3+s^2+2s+1} = \frac{3s+1}{0{,}9s^4+3s^3+6s^2+3s}$$

Z neho získame charakteristickú rovnicu rozpojeného obvodu podľa (54) $M(s) + N(s) = 0$

$$0{,}9s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 6s + 1 = 0$$



Obr. 58

Vidíme, že je splnená nutná podmienka kladnosti všetkých koeficientov a preto zostavíme determinant H_3 a vyčíslime ho

$$H_3 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0{,}9 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 66{,}6$$

Determinant H_3 je kladný a preto je regulačný obvod stabilný.

Príklad 32:

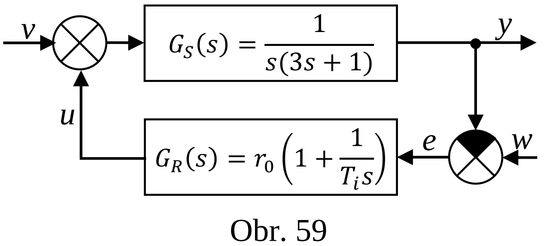
Pre aké hodnoty integračnej časovej konštanty T_i PI regulátora zapojeného v obvode podľa obr. 59 je regulačný obvod stabilný?

Riešenie: Prenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = \frac{1}{s(3s+1)} r_0 \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{T_i r_0 s + r_0}{3T_i s^3 + T_i s^2}$$

a z neho charakteristická rovnica

$$3T_i s^3 + T_i s^2 + T_i r_0 s + r_0 = 0$$



Obr. 59

Za predpokladu r_0, $T_i > 0$ sú všetky koeficienty kladné (nutná podmienka stability) a Hurwitzov determinant H_2 má tvar

$$H_2 = \begin{vmatrix} T_i & r_0 \\ 3T_i & T_i r_0 \end{vmatrix} = T_i r_0 (T_i - 3)$$

Aby bol obvod stabilný, musí byť $H_2 > 0$ a to znamená $T_i > 3$ [s]. Pri $T_i = 3$[s] bude obvod na hranici stability, pretože determinant je nulový. Konštanta r_0 (zosilnenie regulátora) nemá v tomto prípade na stabilitu vplyv.

Príklad ukazuje, že Hurwitzovým kritériom môžeme pomerne ľahko určiť rozmedzie jednotlivých parametrov, pre ktoré je obvod stabilný.

4.3.2. Routh-Schurovo kritérium

Kritérium vychádza opäť z charakteristickej rovnice obvodu (52)

$$a_n s^n + \ \dots \ + a_1 s + a_0 = 0$$

a je to v podstate algoritmus, podľa ktorého vykonávame postupnú redukciu charakteristickej rovnice na rovnicu nižšieho stupňa, až sa dostaneme k rovnici druhého stupňa.

Routh-Schurovo kritérium: Regulačný obvod je stabilný, keď sú koeficienty všetkých rovníc po postupnej redukcii charakteristickej rovnice kladné.

Schéma redukcie je nasledujúca:

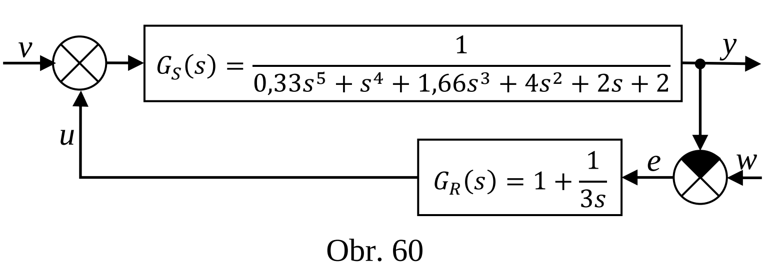
- napíšeme koeficienty charakteristickej rovnice do riadku od najvyššej mocniny po najnižšiu (je to možné aj naopak),
- podčiarkneme párne koeficienty v poradí (každý druhý),
- každý podčiarknutý koeficient násobíme podielom dvoch najvyšších koeficientov a_n/a_{n-1} a výsledok napíšeme do druhého riadku posunutý o jedno miesto vľavo,
- druhý riadok (ktorý má členy vždy objeden prvého riadku) odčítame od prvého riadku a dostaneme tretí riadok,
- koeficienty tretieho riadku sú koeficienty redukovanej rovnice - o jeden stupeň nižšej, než bola pôvodná rovnica, lebo na mieste najvyššieho koeficientu sme dostali nulu.

$$\begin{array}{cccccc|c}
a_n & \underline{a_{n-1}} & a_{n-2} & \underline{a_{n-3}} & a_{n-4} & & \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) \\
\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-1} & & \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3} & & \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5} & & \\
\hline
0 & a_{n-1} & a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3} & a_{n-3} & a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5} & &
\end{array}$$

- redukciu vykonávame týmto spôsobom ďalej, až na rovnicu 2. stupňa (tri koeficienty). Nulu na začiatku radu koeficientov neuvažujeme. Koeficienty vo všetkých redukovaných rovniciach musia byť kladné. To je podmienka stability.

Príklad 33

Určte stabilitu regulačného obvodu zadaného na Obr. 60.



Obr. 60

Riešenie: Najprv, ako obvykle, určíme prenos rozpojeného obvodu

$$G_0(s) = \left(\frac{3s+1}{3s}\right) \frac{1}{0{,}33s^5 + s^4 + 1{,}66s^3 + 4s^2 + 2s + 2} = \frac{3s+1}{s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 6s^2 + 6s}$$

Charakteristická rovnica obvodu je

$$(1)s^6 + 3s^5 + 5s^4 + 12s^3 + 6s^2 + 9s + 1 = 0$$

$(a_6s^6 + a_5s^5 + a_4s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0 = 0)$ všeobecný tvar rovnice

1	3	5	12	6	9	1	(1/3)
1		4		3			
0	3	1	12	3	9	1	(3)
	3		9		3		
	0	1	3	3	6	1	(1/3)
		1		2			
		0	3	1	6	1	(3)
			3		3		
			0	1	3	1	

Podľa daného algoritmu Routh-Schurovho kritéria vykonáme postupnú redukciu stupňa charakteristickej rovnice. (Pre väčšiu názornosť sú koeficienty charakteristickej rovnice najvyššieho stupňa zapísané farebne).

Koeficienty pri všetkých stupňoch rovníc sú kladné a preto je obvod stabilný.

4.3.3. Michajlov-Leonhardovo kritérium

Je to frekvenčné kritérium, ktoré vychádza z charakteristickej rovnice obvodu (52)

$$a_ns^n + \ldots + a_1s + a_0 = 0$$

Z ľavej strany tejto rovnice utvoríme funkciu

$$H(s) = a_ns^n + \ldots + a_1s + a_0 \tag{55}$$

kde s je rovnako ako v charakteristickej rovnici (52) komplexná premenná.

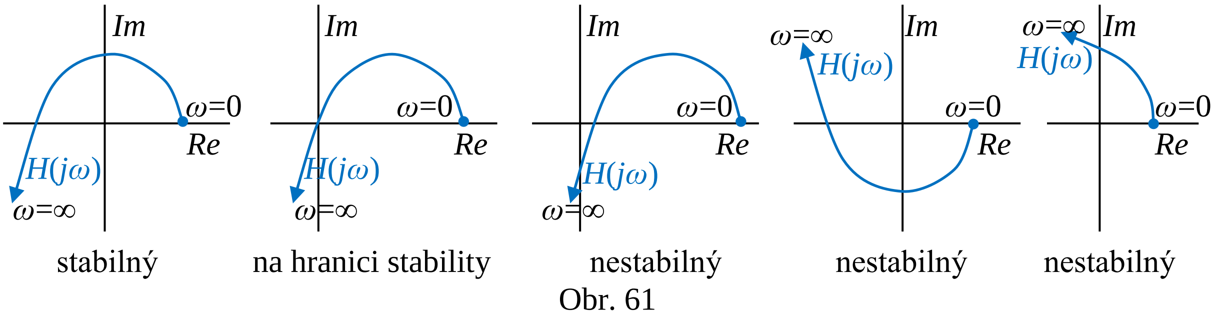
Kritérium hodnotí stabilitu podľa krivky, ktorú opíše koncový bod charakteristického vektora $H(j\omega)$ v komplexnej rovine pri zmene frekvencie ω od 0 do ∞. Vektor $H(j\omega)$ vznikne z charakteristickej funkcie (55) dosadením $s = j\omega$

$$\boldsymbol{H(j\omega) = a_n(j\omega)^n + \ldots + a_1(j\omega) + a_0} \tag{56}$$

Túto krivku nazývame krivkou $H(j\omega)$ alebo tiež Michajlovov-Leonhardovou krivkou.

Michajlov-Leonhardovo kritérium: Aby bol regulačný obvod stabilný, musí Michajlov-Leonhardova krivka $H(j\omega)$ začínať na kladnej reálnej polosi komplexnej roviny a s rastúcim ω od 0 do ∞ musí prejsť postupne (tzn. v poradí) v kladnom zmysle (proti pohybu hodinových ručičiek) toľkými kvadrantmi, koľkého stupňa je charakteristická rovnica.

Napr. pre rovnicu 3. stupňa je obvod stabilný alebo nestabilný, ak má krivka $H(j\omega)$ priebeh podľa obr. 61.

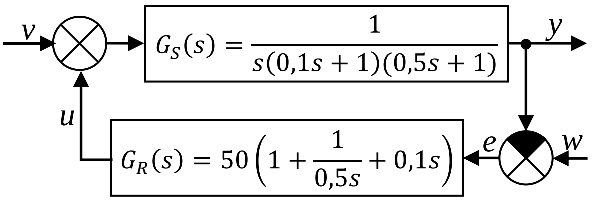


Obr. 61

Krivku $H(j\omega)$ nie je potrebné vždy kresliť celú, postačí len vypočítať polohu jej priesečníkov s osami súradníc. V tom prípade sa reálna a imaginárna časť výrazu $H(j\omega)$ položí rovné nule a z toho sa vypočítajú frekvencie spomenutých priesečníkov. Z frekvencií sa potom určí ich poloha a z polohy ľahko určíme priebeh celej charakteristiky.

Príklad 34

Určte stabilitu regulačného obvodu podľa Obr. 62.



Obr. 62

Riešenie: Prenos rozpojeného obvodu je

$$G_0(s) = \frac{1}{s(0{,}1s+1)(0{,}5s+1)} 50\left(1+\frac{1}{0{,}5s}+0{,}1s\right) = \frac{5s^2+50s+100}{0{,}05s^4+0{,}6s^3+s^2}$$

Charakteristická rovnica je

$$0{,}05s^4+0{,}6s^3+6s^2+50s+100=0$$

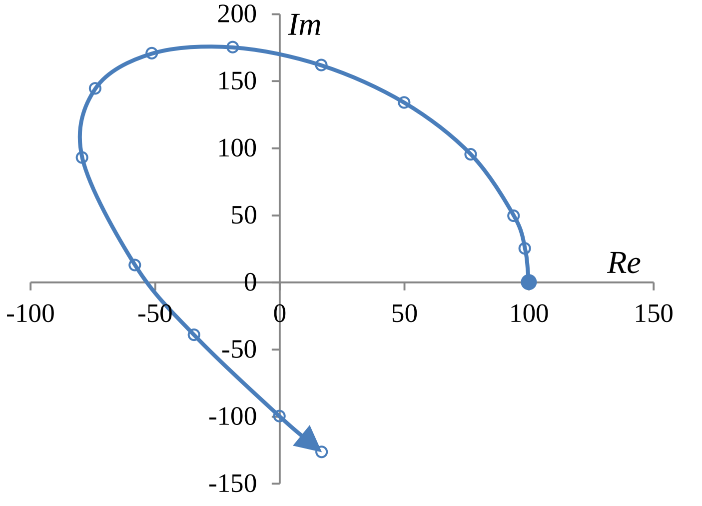
Michajlov-Leonhardov vektor

$$H(j\omega) = 0{,}05(j\omega)^4+0{,}6(j\omega)^3+6(j\omega)^2+50(j\omega)+100 = \underbrace{0{,}05\omega^4-6\omega^2+100}_{Re} + \underbrace{j\omega(50-0{,}6\omega^2)}_{Im}$$

Pre tento výraz zostrojíme na základe Tab. 6 Michajlov-Leonhardovu krivku $H(j\omega)$ – Obr. 63. Pretože stupeň charakteristickej rovnice je n=4 a krivka prechádza v kladnom zmysle štyrmi za sebou idúcimi kvadrantmi, je regulačný obvod stabilný.

ω	*Re*	*Im*
0,0	100,0	0,0
0,5	98,5	24,9
1,0	94,1	49,4
2,0	76,8	95,2
3,0	50,1	133,8
4,0	16,8	161,6
5,0	-18,8	175,0
6,0	-51,2	170,4
7,0	-74,0	144,2
8,0	-79,2	92,8
9,0	-58,0	12,6
9,5	-34,2	-39,4
10,0	0,0	-100,0
10,2	17,0	-126,7
11,2	134,1	-283,0

Tab. 6



Obr. 63

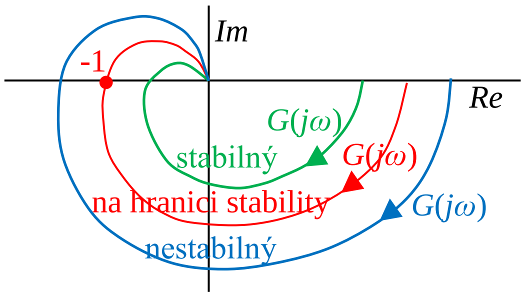
4.3.4. Nyquistovo kritérium

Je to frekvenčné kritérium, ktoré je založené na znalosti priebehu frekvenčnej charakteristiky rozpojeného obvodu. Môže byť použité aj pre regulačné obvody s dopravným oneskorením, kde nie je možné použiť algebrické kritériá. Ďalšou jeho výhodou je to, že nemusíme poznať ani analytický tvar prenosu rozpojeného obvodu, stačí experimentálne získaná frekvenčná charakteristika. A oproti algebrickým kritériám má prednosť tiež v tom, že stabilitu skúmame nielen z kvantitatívneho hľadiska (stabilný či nestabilný), ale aj z hľadiska kvalitatívneho, do akej miery je obvod stabilný.

Kritérium vychádza z prenosu rozpojeného obvodu (36), ktorý si podľa (53) môžeme vyjadriť v tvare podielu polynómov

$$G_0(s) = G_R(s)G_S(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$$

K prenosu rozpojeného obvodu $G_0(s)$ zostavíme frekvenčný prenos rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$ a známym spôsobom zostrojíme frekvenčnú charakteristiku rozpojeného obvodu.



Obr. 64

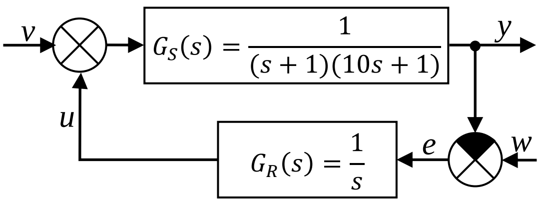
Ak prechádza frekvenčná charakteristika rozpojeného obvodu kritickým bodom **–1**, je obvod na hranici stability.

Nyquistovo kritérium: Regulačný obvod je stabilný, ak kritický bod [-1, 0] leží vľavo od frekvenčnej charakteristiky rozpojeného obvodu $G_0(j\omega)$ pre frekvencie ω od 0 do ∞.

Priebeh charakteristík pre stabilný obvod, pre obvod na hranici stability a pre nestabilný obvod je na Obr. 64.

Príklad 35

Vyšetrite stabilitu regulačného obvodu podľa Obr. 65.



Obr. 65

Riešenie: Prenos rozpojeného obvodu je

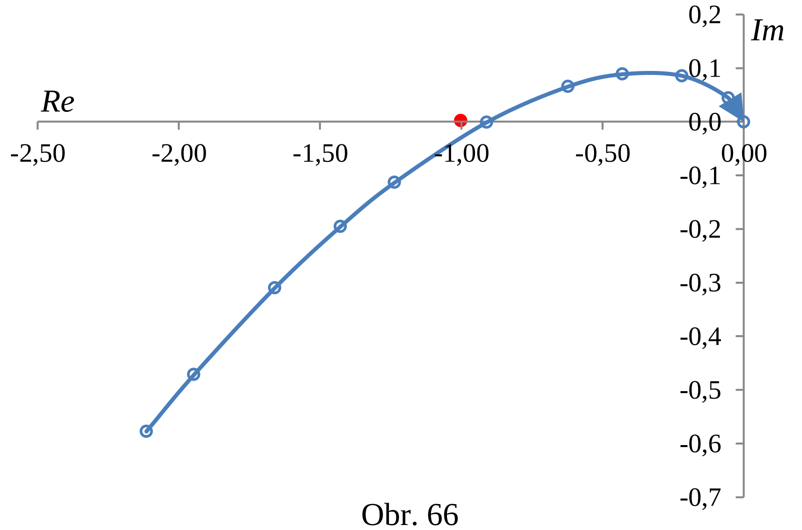
$$G_0(s) = \frac{1}{s(s+1)(10s+1)}$$

Frekvenčný prenos $G_0(j\omega)$ rozdelíme na reálnu a imaginárnu časť a zostrojíme frekvenčnú charakteristiku rozpojeného obvodu v komplexnej rovine (Tab. 7, Obr. 66).

$$G_0(j\omega) = \frac{-11\omega^2}{121\omega^4+(\omega-10\omega^3)^2} - j\frac{\omega-10\omega^3}{121\omega^4+(\omega-10\omega^3)^2}$$

ω	*Re*	*Im*
0,20	-2,115	-0,577
0,21	-1,947	-0,471
0,23	-1,661	-0,309
0,25	-1,428	-0,195
0,27	-1,237	-0,113
0,32	-0,910	0,000
0,38	-0,623	0,066
0,45	-0,430	0,089
0,60	-0,219	0,086
1,00	-0,054	0,045
10,0	0,0	0,0

Tab. 7



Obr. 66

Kritický bod [-1, 0] leží vľavo od frekvenčnej charakteristiky $G_0(j\omega)$ a preto je obvod stabilný.