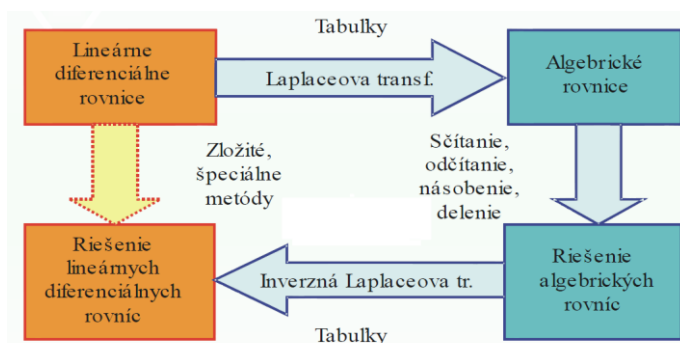


LAPLACEOVA TRANSFORMÁCIA – výťah

Laplaceova transformácia (ďalej LT) je matematický aparát, ktorý znamená, že každej funkcii $f(t)$ z jednej množiny premennej t priradíme funkciu $F(s)$ z množiny funkcií komplexnej premennej s .



Význam pojmu transformácia je, že priradíme tzv. **originálu** (funkcia času t) určitým predpisom tzv. **obraz** (funkcia komplexnej premennej s).

Transformácia **originál**→**obraz** je priama transformácia. Existuje samozrejme k nej **spätná transformácia**, teda transformácia **obraz**→**originál**, ktorá k obrazu $F(s)$ priraduje opäť originál $f(t)$.

LT L priraduje funkcii $f(t)$ pre čas $t \geq 0$ funkciu $F(s)$ podľa vzťahu

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt, \text{ čo symbolicky zapisujeme vzťahom } \boxed{L\{f(t)\} = F(s)}$$

Naopak spätná transformácia sa symbolicky zapisuje vzťahom $\boxed{f(t) = L^{-1}\{F(s)\}}$

Táto spätná transformácia sa môže vykonať vzťahom pre výpočet originálu k danému obrazu

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c F(s) e^{st} ds \quad \text{V praxi sa LT vykonáva použitím slovníka Laplaceovej transformácie.}$$

Slovník LT tých najdôležitejších a najpoužívanějších funkcií

	$f(t)$	$F(s)$		$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t);$ (Diaracov impulz)	1	9	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2 + \omega^2)}$
2	$f(t) = 1;$ (jednotkový skok)	$\frac{1}{s}$	10	$\cos \omega t$	$\frac{s}{(s^2 + \omega^2)}$
3	a	$\frac{a}{s}$	11	$\sinh \omega t$	$\frac{\omega}{(s^2 - \omega^2)}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$	12	$\cosh \omega t$	$\frac{s}{(s^2 - \omega^2)}$
5	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	13	$t \sin \omega t$	$\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	14	$t \cos \omega t$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
7	$\frac{1}{a}(1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$	15	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s-a)^2 + \omega^2}$
8	$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	16	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{s-a}{(s-a)^2 + \omega^2}$

Hlavné vety transformácie

V 1.: Násobenie konštantou. Nech k je konštanta, a $F(s)$ je Laplaceov (L) obraz $f(t)$. Potom

$$\boxed{L\{kf(t)\} = kF(s)}$$

V 2.: Súčet a rozdiel. Nech $F_1(s)$ a $F_2(s)$ sú Laplaceove obrazy funkcií $f_1(t)$ a $f_2(t)$. Potom

$$\boxed{L\{f_1(t) \pm f_2(t)\} = F_1(s) \pm F_2(s)}$$

V 3.: O obraze derivácie. Nech $F(s)$ je L obraz $f(t)$ a $f(0)$ je limita $f(t)$ keď t sa blíži k 0. LT časovej derivácie $f(t)$ je

$$\boxed{L\{f'(t)\} = sF(s) - \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = sF(s) - f(0)}$$

n -tej derivácie

$$\boxed{L\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)}$$

V 4.: O obraze integrálu. L obraz integrálu $f(t)$ v čase je L obraz $f(t)$ podelený s ,

$$\boxed{L\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}}$$